Exercice 1.

1. (a) On a

$$\begin{aligned} x^2-4=0 &\iff (x-2)(x+2)=0 \\ &\iff x-2=0 \text{ ou } x+2=0 \\ &\iff x\in\{-2,2\} \end{aligned}$$

(b) On a

$$\begin{aligned} \frac{x^2-4}{x-2}=0 &\iff \begin{cases} x^2-4=0 \\ x-2\neq 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x=2 \text{ ou } x=-2 \\ x\neq 2 \end{cases} \\ &\iff x=-2 \end{aligned}$$

2. (a) On remarque que -1 est racine évidente de x^2-3x-4 qui, du coup, est factorisable par $x+1$. Alors, par factorisation à la volée, on obtient $x^2-3x-4=(x+1)(x-4)$.

(b) On a

$$\begin{aligned} \frac{x^2-2x}{x-1}\leqslant\frac{x+4}{x-1} &\iff \frac{x^2-3x-4}{x-1}\leqslant 0 \\ &\iff \frac{(x+1)(x-4)}{x-1}\leqslant 0 \end{aligned}$$

Pour résoudre cette dernière inéquation, on utilise le tableau de signes 1.

x	$-\infty$		-1		1		4		$+\infty$
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$x-4$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$\frac{(x+1)(x-4)}{x-1}$		$-$	0	$+$	$\|$	$-$	0	$+$	

TABLE 1 – Tableau de signe de $\frac{(x+1)(x-4)}{x-1}$

On en conclut que :

$$\frac{x^2-2x}{x-1}\leqslant\frac{x+4}{x-1} \iff x\in\,]-\infty,-1]\cup\,]1,4]$$

Exercice 2.

1. La fonction f est impaire car

— son ensemble de définition est $\mathbb{R}$ et est donc symétrique par rapport à 0 ;
— pour tout x dans $\mathscr{D}_f$,

$$\begin{aligned}f(-x) &= (-x)^3 + (-x)\\ &= -x^3 - x\\ &= -\left(x^3 + x\right)\\ &= -f(x)\end{aligned}$$

On peut donc ne l'étudier que sur $[0, +\infty[$.

2. i. On a $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$.
   ii. On en déduit que $b^3 - a^3 = (b-a)(b^2 + ba + a^2)$.
   On a :

$$\begin{aligned}f(b) - f(a) &= (b^3 + b) - (a^3 + a)\\ &= b^3 - a^3 + b - a\end{aligned}$$

(b) Il s'ensuit que, pour a et b distincts dans $\mathbb{R}$

$$\begin{aligned}\tau_f(a,b) &= \frac{f(b) - f(a)}{b-a}\\ &= \frac{b^3 - a^3 + b - a}{b-a}\\ &= \frac{(b-a)(b^2 + ba + a^2) + b - a}{b-a}\\ &= \frac{(b-a)(b^2 + ba + a^2 + 1)}{b-a}\\ &= b^2 + ba + a^2 + 1\end{aligned}$$

(c) Soit a et b deux réels distincts quelconques de $[0, +\infty[$. Alors

$$\begin{aligned} & ab \geqslant 0\\ \text{donc} \quad & b^2 + ba + a^2 \geqslant 0\\ \text{donc} \quad & b^2 + ba + a^2 + 1 \geqslant 1\\ \text{donc} \quad & b^2 + ba + a^2 + 1 > 0\\ \text{donc} \quad & \tau_f(a,b) > 0\end{aligned}$$

Puisque a et b sont quelconques dans $[0, +\infty[$, ceci prouve que, sur cet intervalle, le taux de variation de f est strictement positif et donc, par définition, que f est strictement croissante sur $[0, +\infty[$.

Exercice 3.

1. On a

$$f(x) = \frac{|x| + x}{2}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{x+x}{2} & \text{si } x \geqslant 0 \\ \dfrac{-x+x}{2} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$
$$= \begin{cases} x & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

2. La courbe $\mathscr{C}$ de la fonction f est représentée à la figure 1.

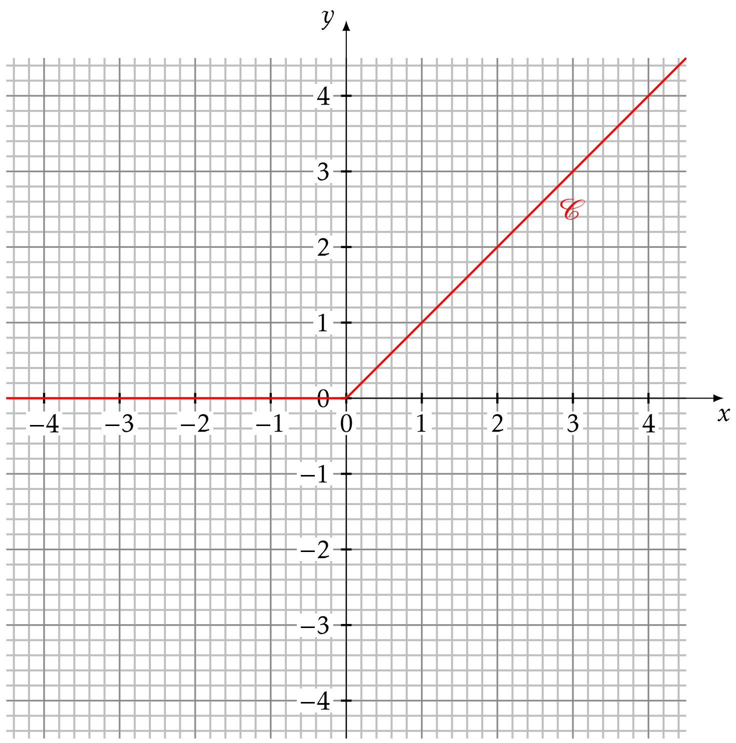

Figure 1 – Courbe de la fonction f

Exercice 4.

1. (a) On a $\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{12}$.
   (b) On a

$$\begin{aligned} \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) &= \cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) \\ &= \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} \\ &= \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \end{aligned}$$

(c) On a

$$\begin{aligned}\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) &= \sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)\\ &= \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)-\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\\ &= \frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{1}}{2}\\ &= \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\end{aligned}$$

(d) On a

$$\begin{aligned}\cos\frac{\pi}{12} &= \cos\left(2\times\frac{\pi}{24}\right)\\ &= 2\cos^2\frac{\pi}{24}-1\end{aligned}$$

Or $\cos\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ donc

$$2\cos^2\frac{\pi}{24}-1=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

si bien que

$$\begin{aligned}\cos^2\frac{\pi}{24} &= \frac{1+\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}{2}\\ &= \frac{4+\sqrt{6}+\sqrt{2}}{8}\end{aligned}$$

On en déduit que

$$\left|\cos\frac{\pi}{24}\right|=\sqrt{\frac{4+\sqrt{6}+\sqrt{2}}{8}}$$

Or $0\leqslant\frac{\pi}{24}\leqslant\frac{\pi}{2}$ donc $\cos\frac{\pi}{24}\geqslant 0$ si bien que $\left|\cos\frac{\pi}{24}\right|=\cos\frac{\pi}{24}$. Il s'ensuit que

$$\cos\frac{\pi}{24}=\sqrt{\frac{4+\sqrt{6}+\sqrt{2}}{8}}$$

2. (a) i. La relation fondamentale de la trigonométrie circulaire est

$$\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1$$

ii. En divisant par $\cos^2\alpha$ (non nul puisque $\alpha\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$), on en déduit que

$$1+\tan^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha} \tag{1}$$

(b) i. On sait que $\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$.

ii. On en déduit que

$$\begin{aligned}\sin 2\alpha &= 2\,\sin\alpha\cos\alpha\\ &= 2\,\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\cos^2\alpha\\ &= 2\,\tan\alpha\cos^2\alpha\end{aligned}$$

(c) On déduit de ce qui précède, en prenant l'inverse des membres de l'égalité (1), que

$$\begin{aligned}\sin 2\alpha &= 2\,\tan\alpha\cos^2\alpha\\ &= \frac{2\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha}\end{aligned}$$