

Exercice 1.

1. (a) On a

$$\begin{aligned}
 x^2 - 4 = 0 &\iff (x-2)(x+2) = 0 \\
 &\iff x-2 = 0 \text{ ou } x+2 = 0 \\
 &\iff x \in \{-2, 2\}
 \end{aligned}$$

(b) On a

$$\begin{aligned}
 \frac{x^2 - 4}{x-2} = 0 &\iff \begin{cases} x^2 - 4 = 0 \\ x-2 \neq 0 \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} x = 2 \text{ ou } x = -2 \\ x \neq 2 \end{cases} \\
 &\iff x = -2
 \end{aligned}$$

2. (a) On remarque que -1 est racine évidente de $x^2 - 3x - 4$ qui, du coup, est factorisable par $x+1$. Alors, par factorisation à la volée, on obtient $x^2 - 3x - 4 = (x+1)(x-4)$.

(b) On a

$$\begin{aligned}
 \frac{x^2 - 2x}{x-1} \leq \frac{x+4}{x-1} &\iff \frac{x^2 - 3x - 4}{x-1} \leq 0 \\
 &\iff \frac{(x+1)(x-4)}{x-1} \leq 0
 \end{aligned}$$

Pour résoudre cette dernière inéquation, on utilise le tableau de signes 1.

x	$-\infty$	-1	1	4	$+\infty$	
$x+1$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	
$x-4$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	
$x-1$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	
$\frac{(x+1)(x-4)}{x-1}$	$-$	0	$+$	$-$	0	$+$

TABLE 1 – Tableau de signe de $\frac{(x+1)(x-4)}{x-1}$

On en conclut que :

$$\frac{x^2 - 2x}{x-1} \leq \frac{x+4}{x-1} \iff x \in]-\infty, -1] \cup]1, 4]$$

Exercice 2.

1. La fonction f est impaire car
- son ensemble de définition est $\mathbb{R}$ et est donc symétrique par rapport à 0;
 - pour tout x dans $\mathcal{D}_f$,

$$\begin{aligned} f(-x) &= (-x)^3 + (-x) \\ &= -x^3 - x \\ &= -(x^3 + x) \\ &= -f(x) \end{aligned}$$

On peut donc ne l'étudier que sur $[0, +\infty[$.

2. (a) i. On a $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$.
 ii. On en déduit que $b^3 - a^3 = (b - a)(b^2 + ba + a^2)$.
 (b) On a :

$$\begin{aligned} f(b) - f(a) &= (b^3 + b) - (a^3 + a) \\ &= b^3 - a^3 + b - a \end{aligned}$$

- (c) Il s'ensuit que, pour a et b distincts dans $\mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \tau_f(a, b) &= \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \\ &= \frac{b^3 - a^3 + b - a}{b - a} \\ &= \frac{(b - a)(b^2 + ba + a^2) + b - a}{b - a} \\ &= \frac{(b - a)(b^2 + ba + a^2 + 1)}{b - a} \\ &= b^2 + ba + a^2 + 1 \end{aligned}$$

- (d) Soit a et b deux réels distincts quelconques de $[0, +\infty[$. Alors

$$\begin{aligned} ab &\geq 0 \\ \text{donc } b^2 + ba + a^2 &\geq 0 \\ \text{donc } b^2 + ba + a^2 + 1 &\geq 1 \\ \text{donc } b^2 + ba + a^2 + 1 &> 0 \\ \text{donc } \tau_f(a, b) &> 0 \end{aligned}$$

Puisque a et b sont quelconques dans $[0, +\infty[$, ceci prouve que, sur cet intervalle, le taux de variation de f est strictement positif et donc, par définition, que f est strictement croissante sur $[0, +\infty[$.

Exercice 3.

1. Le tableau 2 permet d'exprimer $f(x)$ sans valeur absolue :

$$f(x) = \begin{cases} -2x - 2 & \text{si } x \in]-\infty, -1[\\ 0 & \text{si } x \in [-1, 1] \\ 2x - 2 & \text{si } x \in]1, +\infty[\end{cases}$$

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$ x + 1 $	$-x - 1$	0	$x + 1$	$x + 1$
$ x - 1 $	$-x + 1$	$-x + 1$	0	$x - 1$
$f(x)$	$-2x - 2$	0	$2x - 2$	

TABLE 2 – Expression de $f(x)$ sans valeur absolue

2. La courbe $\mathcal{C}$ de la fonction f est représentée à la figure 1.

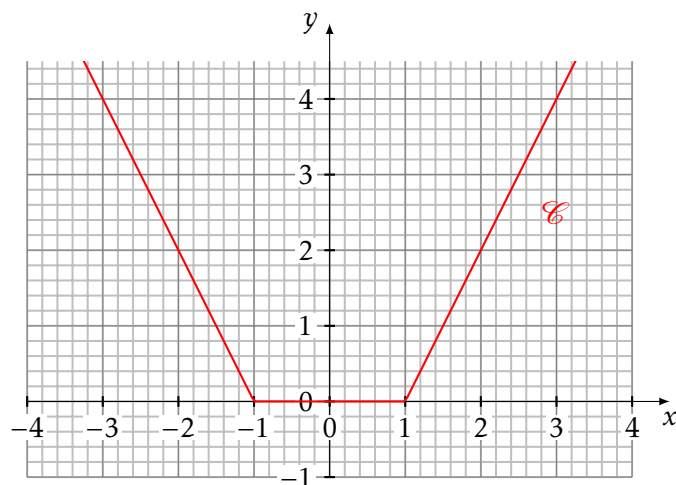


FIGURE 1 – Courbe de la fonction f

Exercice 4.

1. Cf. cours.
2. (a) i. Cf. cours.
ii. Cf. cours.

iii. Cf. cours.

iv. Cf. cours.

v. Cf. cours.

vi. Cf. cours.

(b) De l'égalité :

$$\cos 2a = 2 \cos^2 a - 1$$

on déduit facilement :

$$\cos^2 a = \frac{1 + \cos 2a}{2}$$

3. (a) Puisque $\cos^2 a = \frac{1 + \cos 2a}{2}$, on a pour $a = \frac{\pi}{8}$:

$$\begin{aligned} \cos^2 \frac{\pi}{8} &= \frac{1 + \cos \frac{\pi}{4}}{2} \\ &= \frac{1 + \frac{\sqrt{2}}{2}}{2} \\ &= \frac{2 + \sqrt{2}}{4} \end{aligned}$$

On en déduit que :

$$\begin{aligned} \left| \cos \frac{\pi}{8} \right| &= \sqrt{\frac{2 + \sqrt{2}}{4}} \\ &= \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2} \end{aligned}$$

Or $0 \leq \frac{\pi}{8} \leq \frac{\pi}{2}$ donc $\cos \frac{\pi}{8} \geq 0$ si bien que $\left| \cos \frac{\pi}{8} \right| = \cos \frac{\pi}{8}$. Il s'ensuit que

$$\cos \frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}$$

(b) i. On a :

$$\begin{aligned} \sin^2 \frac{\pi}{8} &= 1 - \cos^2 \frac{\pi}{8} \\ &= 1 - \frac{2 + \sqrt{2}}{4} \\ &= \frac{2 - \sqrt{2}}{4} \end{aligned}$$

On en déduit que :

$$\left| \sin \frac{\pi}{8} \right| = \sqrt{\frac{2 - \sqrt{2}}{4}}$$

$$= \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$$

Or $0 \leq \frac{\pi}{8} \leq \frac{\pi}{2}$ donc $\sin \frac{\pi}{8} \geq 0$ si bien que $\left| \sin \frac{\pi}{8} \right| = \sin \frac{\pi}{8}$. Il s'ensuit que

$$\sin \frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$$

ii. Par définition :

$$\begin{aligned} \tan \frac{\pi}{8} &= \frac{\sin \frac{\pi}{8}}{\cos \frac{\pi}{8}} \\ &= \frac{\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}}{\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}} \\ &= \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{\sqrt{2+\sqrt{2}}} \\ &= \sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}} \\ &= \sqrt{\frac{(2-\sqrt{2})^2}{(2+\sqrt{2})(2-\sqrt{2})}} \\ &= \frac{|2-\sqrt{2}|}{\sqrt{2}} \\ &= \frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \\ &= \sqrt{2}-1 \end{aligned}$$