

Département MT2E, 2^e année

Exercices de probabilités

Année 2025–2026

1 Dénombrement

Exercice 1

Combien de « mots » de 5 lettres peut-on former ?

Exercice 2

Un code est constitué de 8 signes parmi les 26 lettres de l'alphabet et les 10 chiffres.

1. Combien de codes peuvent être constitués ?
2. Un logiciel de cassage de code teste environ 10^8 codes par seconde. Quel temps maximal met ce logiciel pour découvrir le code ?

Exercice 3

Raymond Queneau a écrit un ouvrage intitulé *Cent mille milliards de poèmes* qui est composé de 10 pages contenant chacune 14 vers et massicotées entre chaque vers. Le lecteur peut composer son propre poème en choisissant le 1^{er} vers sur l'une des 10 pages, le 2^e vers sur l'une des 10 pages, etc. Justifier le titre de l'ouvrage.

Exercice 4

Un immeuble est protégé par un digicode constitué de quatre, cinq ou six chiffres suivi d'une lettre parmi A, B et C. Combien de digicodes peuvent ainsi être créés ?

Exercice 5

Soit A l'ensemble des nombres à 4 chiffres, le premier étant différent de 0.

1. Calculer le nombre d'éléments de A .
2. Dénombrer les éléments de A :
 - (a) composés de 4 chiffres distincts ;
 - (b) composés d'au moins 2 chiffres identiques ;
 - (c) composés de 4 chiffres distincts autres que 5 et 7.

Exercice 6

Dans une ville, il y a 4 pharmacies qui ferment chacune un jour par semaine.

1. Déterminer le nombre de façons d'attribuer un jour de fermeture hebdomadaire à ces 4 pharmacies.
2. Même question si plusieurs pharmacies ne peuvent fermer le même jour.
3. Même question si, chaque jour, il doit y avoir au moins une pharmacie ouverte.

Exercice 7

Une course oppose 20 concurrents, dont Usain.

1. Combien y a-t-il de podiums possibles ?
2. Combien y a-t-il de podiums possibles où Usain est premier ?
3. Combien y a-t-il de podiums possibles dont Usain fait partie ?
4. On souhaite récompenser les 3 premiers en leur offrant un prix identique à chacun. Combien y a-t-il de distributions de récompenses possibles ?

Exercice 8

1. Dans une pièce, il y a une table disposant de 7 chaises, numérotées de 1 à 7. Sept personnes entrent. Combien y a-t-il de possibilités de les distribuer autour de cette table ?
2. Dans une pièce, il y a deux tables. La première dispose de 3 chaises, numérotées de 1 à 3, la seconde dispose de 4 chaises, numérotées de 1 à 4. Sept personnes entrent. Combien y a-t-il de possibilités de les distribuer autour de ces deux tables ?

Exercice 9

Déterminer le nombre de classements possibles dans la promotion.

Exercice 10

Calculer le nombre d'anagrammes des mots :

1. MATHS;
2. ABCDEFGHIJKLMNOPQRSTUVWXYZ;
3. RIRE;
4. TUTT;
5. ANANAS.

Exercice 11

Onze personnes (dont une technicienne $mT2E$) se retrouvent à une réunion de chantier et se serrent tous la main. Combien de poignées de mains ont été échangées?

Exercice 12

Dans une entreprise de 18 salariés dont 6 hommes, on choisit au hasard un comité de 3 personnes pour représenter l'entreprise à un salon.

1. Combien de comités peut-on constituer?
2. Même question si le comité doit être représentatif de la proportion hommes/femmes.

Exercice 13

Un sac contient 5 jetons rouges et 8 jetons verts. On suppose que les jetons sont discernables (numérotés par exemple) et on effectue un tirage de 6 jetons de ce sac.

1. On suppose que les jetons sont tirés successivement en remettant à chaque fois le jeton tiré.
 - (a) Donner le nombre de résultats possibles.
 - (b) Combien de ces résultats amènent :
 - i. exactement 1 jeton vert?
 - ii. au moins 1 jeton vert?
 - iii. au plus 1 jeton vert?

- iv. 2 fois plus de jetons verts que de jetons rouges?
- 2. Mêmes questions en supposant que les jetons sont tirés successivement sans remise.
- 3. Mêmes questions en supposant que les jetons sont tirés simultanément.

Exercice 14

On tire au hasard une main de 8 cartes dans un jeu bien battu de 52 cartes.

- 1. Dénombrer les mains possibles.
- 2. Dénombrer les mains telles que :
 - E_1 = « 4 cartes soient des as »?
 - E_2 = « 4 cartes soient des as et 2 cartes soient des rois »?
 - E_3 = « 3 cartes soient d'une même couleur et 3 cartes soient d'une même autre couleur »?
 - E_4 = « au moins une carte soit un as »?

Exercice 15

On lance cinq fois une pièce de monnaie bien équilibrée.

- 1. Quel est le nombre de résultats possibles?
- 2. Quelle est le nombre de possibilités d'obtenir :
 - (a) exactement une fois « face »?
 - (b) au moins une fois « face »?
 - (c) quatre « pile » au moins?
 - (d) « pile » au premier tirage puis au moins une fois « face » dans les quatre suivants?
 - (e) « pile » au premier tirage ou « face » au troisième tirage?
 - (f) plus de « face » que de « pile »?
 - (g) une série de longueur 3 au moins (c'est à dire : au moins trois « pile » consécutifs ou trois « face » consécutifs)?

2 Probabilités

Exercice 16

Dans un groupe de 100 personnes, on a dénombré 45 personnes blondes, 40 personnes dont les yeux sont bleus, et 25 personnes qui sont blondes aux yeux

bleus. On choisit au hasard une personne dans ce groupe. Quelle est la probabilité pour que la personne désignée possède au moins un des deux caractères (cheveux blonds ou yeux bleus)?

Exercice 17

Dans une population, 45 % des individus sont vaccinés contre la fièvre jaune, 60 % sont vaccinés contre la diphtérie, et 30 % sont vaccinés contre les deux maladies. Quelle est la probabilité, pour un individu choisi au hasard, de n'être vacciné contre aucune de ces deux maladies?

Exercice 18

On tire au hasard une main de 8 cartes dans un jeu bien battu de 52 cartes. Quelles sont les probabilités des événements :

E_1 = « 4 cartes soient des as »?

E_2 = « 4 cartes soient des as et 2 cartes soient des rois »?

E_3 = « 3 cartes soient d'une même couleur et 3 cartes soient d'une même autre couleur »?

E_4 = « au moins une carte soit un as »?

Exercice 19

Neuf sprinters participent à la finale du 100 mètres.

1. Combien de podium sont possibles?
2. On se place dans un cas d'équiprobabilité. Quelle est la probabilité de chaque podium?

Exercice 20

On lance cinq fois une pièce de monnaie bien équilibrée. Quel est l'ensemble des résultats possibles?

1. Trouver un univers Ω et une probabilité $\mathbb{P}$ permettant de modéliser l'expérience.
2. Quelle est la probabilité d'obtenir :
 - (a) exactement une fois « face »?
 - (b) au moins une fois « face »?
 - (c) quatre « pile » au moins?

- (d) « pile » au premier tirage puis au moins une fois « face » dans les quatre suivants?
- (e) « pile » au premier tirage ou « face » au troisième tirage?
- (f) plus de « face » que de « pile »?
- (g) une série de longueur 3 au moins (c'est à dire : au moins trois « pile » consécutives ou trois « face » consécutives)?

Exercice 21

Lors d'une collecte de sang, 18 personnes se sont présentées. Parmi celles-ci, on a noté 11 personnes du groupe O, 4 personnes du groupe A, 2 personnes du groupe B et une personne du groupe AB. À l'issue de la collecte, on prélève au hasard 3 flacons parmi les 18 obtenus. Calculer la probabilité des événements suivants :

1. les sangs des 3 flacons appartiennent au même groupe ;
2. parmi les 3 flacons prélevés, il y a au moins 1 flacon contenant du sang du groupe A ;
3. les sangs des 3 flacons appartiennent à trois groupes différents.

Exercice 22

Combien de fois faut-il lancer un dé pour faire au moins un six avec une probabilité supérieure ou égale à 0,95?

3 Conditionnement et indépendance

Exercice 23

Dans une entreprise, on s'est intéressé à la répartition des hommes et des femmes selon les 3 catégories salariales : ouvrier, agent et cadre. Les résultats obtenus sont reportés dans le tableau 1 page suivante. On choisit au hasard la fiche d'un employé et on considère les événements suivants :

- H : « la fiche choisie est celle d'un homme » ;
- F : « la fiche choisie est celle d'une femme » ;
- O : « la fiche choisie est celle d'un ouvrier » ;
- A : « la fiche choisie est celle d'un agent » ;
- C : « la fiche choisie est celle d'un cadre ».

1. Calculer les probabilités suivantes : $\mathbb{P}(C \cap F)$, $\mathbb{P}(C \cap H)$, $\mathbb{P}(A \cap H)$, $\mathbb{P}(F \cap O)$ et $\mathbb{P}(C \cap H)$, $\mathbb{P}(H)$, $\mathbb{P}(F)$, $\mathbb{P}(O)$, $\mathbb{P}(A)$, $\mathbb{P}(C)$.
2. Calculer les probabilités conditionnelles suivantes : $\mathbb{P}(C|H)$, $\mathbb{P}(H|C)$, $\mathbb{P}(F|C)$, $\mathbb{P}(O|H)$ et $\mathbb{P}(A|H)$. Calculer $\mathbb{P}(H|C) + \mathbb{P}(F|C)$. Que dire de $\mathbb{P}(C|H) + \mathbb{P}(O|H) + \mathbb{P}(A|H)$?
3. On sait que la fiche choisie est celle d'un cadre ; quelle est la probabilité que ce soit celle d'une femme ? d'un homme ?
4. On sait que la fiche choisie est celle d'une femme ; quelle est la probabilité que ce soit celle d'un ouvrier ? d'un agent ? d'un cadre ?

	Homme	Femme
Ouvrier	34,1 %	15,9 %
Agent	17,4 %	12,6 %
Cadre	6,5 %	13,5 %

TABLE 1 : Répartition sexe-catégorie salariale

Exercice 24

Une urne contient 6 boules rouges et 4 boules vertes. On tire successivement et sans remise 2 boules. On considère les événements A : « la première boule tirée est rouge » et B : « la deuxième boule tirée est verte ».

1. Calculer la probabilité des événements A , B sachant A , $A \cap B$ et B .
2. Reprendre l'exercice en supposant que les tirages sont effectués avec remise.

Exercice 25

On considère une urne contenant 4 boules rouges et 3 vertes.

1. On tire une à une et sans remise 2 boules.
 - (a) Quelle est la probabilité que la première boule tirée soit rouge ?
 - (b) Sachant que la première est rouge, quelle est la probabilité que la seconde soit rouge ?
 - (c) Quelle est la probabilité que les deux boules tirées soient rouges ?
2. On tire une à une et sans remise 3 boules. Quelle est la probabilité que la première boule tirée soit rouge, la seconde rouge et le troisième verte ?

Exercice 26

Une étude sur les retards matinaux des étudiants a permis d'établir que 20 % des étudiants de l'ULCO viennent à la fac en train tandis que 60 % prennent le bus. Par ailleurs, sont régulièrement en retard 10 % des étudiants qui arrivent en train, 15 % de ceux qui prennent le bus et 5 % de ceux qui utilisent un autre moyen de transport.

1. Quelle est la probabilité qu'un étudiant, choisi au hasard, arrive en retard ?
2. Quelle est la probabilité qu'un étudiant, choisi au hasard parmi ceux qui arrivent en retard, prenne le train ?
3. Quelle est la probabilité qu'un étudiant, choisi au hasard parmi ceux qui arrivent en retard, prenne le bus ?

Exercice 27

Le sang humain est classé en quatre groupes distincts : A, B, AB, O et on sait que 45 % des individus sont du groupe O. Indépendamment du groupe, le sang peut être soit de rhésus positif (lorsqu'il possède le facteur rhésus), soit de rhésus négatif (lorsqu'il ne possède pas le facteur rhésus). On sait que 80 % des individus du groupe O sont de rhésus positif et que 82 % des individus qui ne sont pas du groupe O sont à rhésus positif.

1. On choisit au hasard un individu.
 - (a) Quelle est la probabilité qu'il soit du groupe O ?
 - (b) Quelle est la probabilité qu'il ne soit pas du groupe O ?
 - (c) Quelle est la probabilité qu'il soit du groupe O et de rhésus positif ?
 - (d) Quelle est la probabilité qu'il soit du groupe O et de rhésus négatif ?
 - (e) Quelle est la probabilité qu'il soit de rhésus positif ?
2. On choisit au hasard un individu de rhésus positif.
 - (a) Quelle est la probabilité qu'il soit du groupe O (on donnera le résultat sous la forme d'un nombre décimal avec deux chiffres après la virgule) ?
 - (b) Quelle est la probabilité qu'il ne soit pas du groupe O (on donnera le résultat sous la forme d'un nombre décimal avec deux chiffres après la virgule) ?

Exercice 28

Une usine fabrique des pièces dont 1,8 % sont défectueuses. Le contrôle des pièces s'effectue selon les probabilités conditionnelles suivantes :

- sachant qu'une pièce est bonne, elle est acceptée avec probabilité 0,97 ;
- sachant qu'une pièce est défectueuse, elle est rejetée avec probabilité 0,99.

Quelle est la probabilité qu'une pièce :

1. soit défectueuse et acceptée ?
2. soit bonne et rejetée ?
3. acceptée soit défectueuse ?
4. rejetée soit bonne ?

Exercice 29

En Belgique, on mange deux types de frites : les frites traditionnelles à section rectangulaire et les frites « new look » à section triangulaire. Parmi les frites consommées

- par les flamands, 65 % sont traditionnelles ;
- par les wallons, 75 % sont traditionnelles.

Une équipe de football est composée de 7 flamands et 4 wallons. Un joueur est surpris à la mi-temps avec un cornet de frites triangulaires. Quelle est la probabilité qu'il soit flamand ?

Exercice 30

Une urne U_1 contient 2 boules rouges et 2 boules vertes. Une urne U_2 contient 2 boules rouges et 1 boule verte. Une urne U_3 contient 1 boule rouge et 3 boules vertes.

1. On tire au hasard une boule de chaque urne. Quelle est la probabilité que ces boules soient toutes les trois vertes ?
2. On tire au hasard une des trois urnes, puis on tire une boule de l'urne choisie. Quelle est la probabilité que la boule choisie soit verte ?
3. Dans les conditions de la question 2, calculez la probabilité que le tirage ait été réalisé dans l'urne U_1 sachant qu'une boule rouge a été tirée ?

Exercice 31

On lance un dé rouge et un dé vert à six faces, équilibrés et on définit les événements suivants :

E_1 = « le dé rouge marque un nombre pair » ;

E_2 = « le dé vert marque un nombre pair ».

Ces événements sont-ils indépendants ?

Exercice 32

On considère une famille comptant n enfants. On note A l'évènement « la famille a des enfants des deux sexes » et B l'évènement « la famille a au plus une fille ».

1. Si $n = 2$, les évènements A et B sont-ils indépendants?
2. Même question si $n = 3$.

Exercice 33

On effectue 3 lancers indépendants d'un dé régulier. On considère les évènements A : « les trois numéros tirés sont différents » et B : « la somme des numéros tirés est égale à 15 ».

1. Calculer la probabilité de réalisation des évènements A et B .
2. Calculer la probabilité conditionnelle de A sachant B .
3. Les évènements A et B sont-ils indépendants?

4 Variables aléatoires

Exercice 34

Une urne contient dix boules dont une jaune, deux rouges, trois vertes et quatre bleues. On suppose que les boules sont indiscernables au toucher et on tire une boule dont on note la couleur : J, R, V ou B . On considère le jeu suivant : on perd trois points si on tire la boule jaune et deux points si on tire une boule rouge, on gagne un point si on tire une boule verte et quatre si on tire une boule bleue. On définit alors la variable aléatoire X par

$$X(J) = -3$$

$$X(R) = -2$$

$$X(V) = 1$$

$$X(B) = 4.$$

1. Donner l'univers Ω rendant compte de cette expérience aléatoire et l'ensemble image de Ω par X .
2. Donner la loi de X .
3. Représenter graphiquement la fonction de répartition de X .
4. Calculer $\mathbb{P}(X < 1)$, $\mathbb{P}(X > 2)$, $\mathbb{P}(X > 4)$ et $\mathbb{P}(X < 0)$.

Exercice 35

Soit X une variable aléatoire dont la loi de probabilité est partiellement donnée par le tableau 2.

1. Compléter le tableau.
2. Notons F la fonction de répartition de X . Calculer $F(-1)$, $F(0)$, $F(0,5)$, $F(1)$, $F(1,05)$, $F(2)$, $F(2,1)$ et $F(-5)$.
3. Calculer l'espérance et la variance de X .

x_i	2	-1	0	1	2
$\mathbb{P}(X = x_i)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$		$\frac{1}{12}$

TABLE 2 : Variable aléatoire X

Exercice 36

Soit les 5 jeux suivants où vous lancez un dé et, si vous obtenez un 6, vous recevez :

1. — 8 €;
— sinon, vous donnez 2 €;
2. — 13 €;
— sinon, vous donnez 2,5 €;
3. — 15 €;
— sinon, vous donnez 3 €;
4. — 4 €;
— sinon, vous donnez 1 €;
5. — 10 €;
— sinon, vous donnez 1 €.

Parmi ces jeux, indiquez

1. ceux qui sont favorables et ceux qui sont défavorables;
2. celui auquel vous préféreriez jouer et celui auquel vous aimeriez le moins jouer.

Exercice 37

Une personne joue à la loterie. On lui présente dix billets dont deux valent 15 points, trois valent 5 points et les autres ne donnent pas de points. Elle tire simultanément deux de ces billets. On note N le nombre de points obtenus.

1. Donner la loi de probabilité de N et tracer sa fonction de répartition.
2. On gagne un lot si on obtient au moins 15 points. Quelle est la probabilité de gagner un lot ?
3. Calculer l'espérance et la variance de N .
4. Un billet coûte 10 € et chaque lot a une valeur de 40 €. Quelle est l'espérance de gain. Ce jeu vous paraît-il équitable ?

Exercice 38

Un tableau de 4 cases est rempli de manière aléatoire avec les chiffres 0 et 1.

1. Combien y a-t-il de tableaux possibles ?
2. On note S la variable aléatoire qui, à chaque tableau, associe la somme des quatre chiffres.
 - (a) Déterminer l'ensemble des valeurs prises par S .
 - (b) Donner la loi de probabilité de S .
 - (c) Calculer l'espérance et la variance de S .

Exercice 39

Un sac contient dix jetons numérotés de 1 à 10. On tire au hasard et simultanément trois jetons du sac. On note X la variable aléatoire qui, à chaque tirage, associe le plus grand des numéros figurant sur les trois jetons. Déterminer la loi de X et calculer son espérance.

Exercice 40

Un petit magasin emploie trois personnes. La probabilité pour que chacune d'entre elles soit absente est égale à 0,05 et on suppose que les absences sont indépendantes les unes des autres. On note X la variable aléatoire qui donne le nombre de personnes absentes. Donner la loi de probabilité de X puis calculer son espérance et sa variance.

Exercice 41

Un dompteur fait entrer sur la piste, au hasard et un par un, deux tigres et quatre lions. Soit X la variable aléatoire qui, à chaque présentation des six animaux, associe le nombre de lions précédant le premier tigre.

1. Quelles sont les valeurs prises par X ?
2. Déterminer la loi de probabilité de X .
3. Quelle est la probabilité qu'il y ait au plus deux lions devant le premier tigre?
4. Quelle est la probabilité qu'il y ait plus de deux lions devant le premier tigre?
5. Calculer l'espérance et la variance de X .

Exercice 42

À l'entraînement de foot, Tony tente des tirs au but. On suppose qu'il marque un but avec probabilité $3/4$.

1. Tony fait un essai. On note X la variable aléatoire qui prend la valeur 1 si le but est marqué et 0 sinon. Donner la loi de X .
2. Tony fait trois essais et on suppose que les tirs sont indépendants les uns des autres. On note Y la variable aléatoire qui donne le nombre de buts et Z celle qui donne le plus grand nombre de buts successifs.
 - (a) Donner les lois de Y et Z .
 - (b) Déterminer la fonction de répartition de Y et tracer son graphe.
 - (c) Calculer l'espérance et la variance de Y .

