Conditions de l'épreuve

1. **Les documents et calculatrices personnelles sont interdits.**
2. **Durée : 1h00.**
3. **Chacune des copies portera le nom de l'étudiant et sera numérotée sous la forme i/n où i est le numéro de la copie et n est le nombre total de copies.**
4. **Toute tentative de fraude sera sanctionnée, au minimum par la note 0/20.**
5. **Le poids relatif des exercices est indiqué en fin d'énoncé.**
6. **Toutes les réponses devront être justifiées.**

Exercice 1

1. Résoudre les équations suivantes :
   (a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $x^2 - 4 = 0$.
   (b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation
   $$\frac{x^2-4}{x-2} = 0$$
2. (a) Factoriser $x^2 - 3x - 4$.
   (b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation
   $$\frac{x^2-2x}{x-1} \leqslant \frac{x+4}{x-1}$$

Exercice 2
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x^3 + x$$

1. Étudier la parité de la fonction f.
2. On rappelle que le taux de variation de f entre a et b est le réel $\tau_f(a,b)$ défini par
   $$\tau_f(a,b) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$
   (a) i. Rappeler la factorisation de $a^3 - b^3$.
   ii. En déduire la factorisation de $b^3 - a^3$.
   (b) Prouver que $f(b) - f(a) = b^3 - a^3 + b - a$.
   (c) Déduire des questions 2(a)ii et 2b que $\tau_f(a,b) = b^2 + ba + a^2 + 1$.
   (d) Déterminer le sens de variation de f sur $[0, +\infty[$.

Exercice 3
Soit f la fonction définie par $f(x) = (|x| + x)/2$.

1. Exprimer f sans valeur absolue.
2. Représenter graphiquement f.

Exercice 4

1. (a) Calculer $\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$.
   (b) Calculer
      i. $\cos\frac{\pi}{12}$;
      ii. $\sin\frac{\pi}{12}$.
   (c) En remarquant que $\frac{\pi}{12} = 2 \times \frac{\pi}{24}$, prouver que

$$\cos\frac{\pi}{24} = \sqrt{\frac{4+\sqrt{6}+\sqrt{2}}{8}}$$

2. Soit α un réel de $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$.
   (a) i. Rappeler la relation fondamentale de la trigonométrie circulaire.
      ii. En déduire que

$$1+\tan^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$$

   (b) i. Rappeler l'expression de $\sin 2\alpha$ en fonction de $\sin\alpha$ et $\cos\alpha$.
      ii. En déduire que

$$\sin 2\alpha = 2\tan\alpha\cos^2\alpha$$

   (c) Déduire de ce qui précède que

$$\sin 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha}$$

Barème indicatif				
Exercice	n° 1	n° 2	n° 3	n° 4
Poids relatif	24 %	26 %	9 %	41 %